Klausur zur Höheren Mathematik 3

für **Studierende der Elektrotechnik**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 5** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 6 – 9** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 01.04.2016 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen **vom 4.4.2016 bis 8.4.2016 zwischen 9:30 und 11:00 oder vom 4.4.2016 bis 7.4.2016 zwischen 14:00 und 15:00** mit Elke Gangl (Raum V57.7.521) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Sei $R > 0$ und S die Kugeloberfläche gegeben durch $r : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, $r(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ R\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ R\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Sei $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Es wird die Teilfläche F von S mit $\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \alpha$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ betrachtet.

(a) Skizzieren Sie die Kugel S und die Fläche F für $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(b) Bestimmen Sie die Tangentialvektoren von F, den Normalenvektor und dessen Betrag.

(c) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt von F und den von S.

(d) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2}$. Berechnen Sie $\int_F f\, d\sigma$.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*) Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ V(x, y, z) = (g(y), h(x), z^3)$ ein Potential? Bestimmen Sie dann ein Potential von V.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, so dass $f(\lambda \vec{x}) = \lambda^2 f(\vec{x})$ für alle reellen $\lambda > 0$ und alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(a) Beweisen Sie, dass $\langle \operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 2 f(\vec{x})$ gilt für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Sei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator, und $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$. Beweisen Sie, dass $\int_B \Delta(f)\, \mathrm{d}V = 2 \int_{\partial B} f\, \mathrm{d}\sigma$ gilt.

(c) Berechnen Sie $\int_{\partial B} (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}\sigma$.

Aufgabe 4 (*8 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(f(z)) = 5$.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Funktion $f(z) = \cos(z)$ und sei z_0 eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass der Imaginärteil von z_0 gleich 0 ist.

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige 2π-periodische Funktionen mit komplexen Fourierkoeffizienten $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bzw. $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Zeigen Sie, dass die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - t) g(t)\, dt$$

durch $(c_k \cdot d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ gegeben sind.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

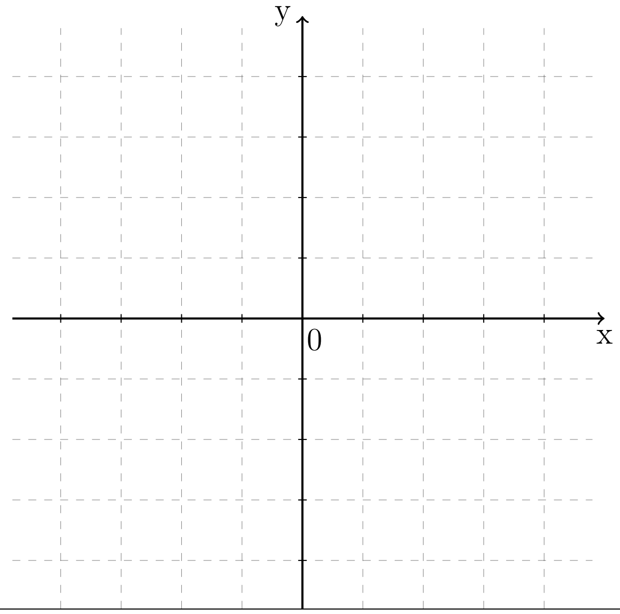
Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $V(x,y) = (x+y, y)$ und die Kurve $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (1,t)$. Berechnen Sie:

$$\int_\gamma V\,ds = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*7 Punkte*)

Sei $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} x+\pi & 0 \leqq x < \pi \\ \frac{3}{2}\pi & x = \pi \\ x-\pi & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion f im Intervall $[-4\pi, 4\pi]$:



(b) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten von f:

$a_k = \boxed{}$ $b_k = \boxed{}$

(c) Welchen Wert hat die Fourier-Reihe von f an der Stelle $x = \pi$?

$$F(\pi) = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*10 Punkte*)

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := \sin(2z)$. Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil von $f(z)$:

$\mathrm{Re}(f(z)) = \boxed{}$ $\mathrm{Im}(f(z)) = \boxed{}$

(b) Beschreiben Sie folgende Menge durch Elemente der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\{z \in \mathbb{C} | e^{z^2} = 1\} = \boxed{}$$

(c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := z^2 + e^{\mathrm{Im}(z)} - ie^{\mathrm{Re}(z)}$. Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil von $f(z)$ und bestimmen Sie die Menge M aller z, an denen f komplex differenzierbar ist.

$\mathrm{Re}(f(z)) = \boxed{}$ $\mathrm{Im}(f(z)) = \boxed{}$

$$M = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*)

Berechnen Sie das Volumen von $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqq z \leqq 10,\ x^2 + y^2 \leqq z\ \}$:

$$vol(S) = \boxed{}$$
